水産海洋研究 第53巻 第4号，1989

海洋におけるエコシステムの勉強—II

岸　　道　郎*

前回は，海洋に限らず，エコシステムモデルについてのごく一般的なお話しをいたしました。今回も，今すこし一般的な話しにおつきあいください。思い出していただくため，アドバイスをいただくため，今後の目次（予定）をもう一度書きます。

目　次（予定）

3.　微分方程式をコンピューターで解こう

(1)　微分方程式の差分化と差分スキーム

1.　エコシステムモデルの作り方，の項で作成した（というほど大げさなものではありませんが），鹿(C)がくぬぎ(E)を1時間に3個食べる式を，コンピューターのプログラムに直してみましょう。もう1回(1-7)式を書いてみると，

$$dE(t)/dt=-3C(t) \qquad (1\text{-}7)$$

この式をコンピューターに解いてもらうためには，少し工夫をしなくてはなりません。なんと(1-5)式で作成した式にもどしてやるのです。

$$E(n+\Delta t)-E(n)=-3\Delta t\cdot C(n) \qquad (1\text{-}5)$$

移項して

$$E(n+\Delta t)=-3\Delta t\cdot C(n)+E(n) \qquad (1\text{-}5')$$

例えば，$n=1$（つまり計算を始める最初の時刻，または1時と考えてもよい）でEが23個（1章の図2参照），Cが2匹とすると，（Cは匹のままとします）

$$E(1+\Delta t)=-3\Delta t\times 2+23$$

となります。さて，ここで混同するかもしれませんが，コンピューターでは，Eに配列(DIMENSION)を与え，$E(1)$に$t=1$のEの値，$E(2)$に$t=1+\Delta t$（計算始めの時刻からΔt時間後）のEの値，$E(3)$に$t=1+2\Delta t$（計算始めの時刻から$2\Delta t$時間後）のEの値，を順番に入れていくようなことをしばしばします。

Δtを0.1時間と仮りにとったとしましょう。(1-5′)は次のようにして解いていくことができます。

$$E(2)=-3\times 0.1\times 2+E(1)$$

$E(1)=23$を代入して

$$E(2)=22.4$$

$$E(3)=-3\times 0.1\times 2+E(2)$$

上で求めた，$E(2)=22.4$を代入して

$$E(3)=21.8$$

繰り返し御注意しますが，$E(3)$は，2時間後（3時）のEの値ではありません。$2\Delta t$（ここでは0.1×2時間後）のEの値が配列Eの3番目に入力されている，ことを表しているのです。

以上，まとめると，

① (1-7)式をコンピューターで解くときは，(1-5′)のように差分で表した式を作ります。
② EにDIMENSIONを与えます。
③ 差分化した(1-5′)式を，$E(n+1)=-3\Delta t\cdot C(n)+E(n)$と表します。
④ $E(1)$に計算始めのEの値を代入して次々に$E(2)$，$E(3)$を求めていきます。

(1-1) 前方差分

上記で述べてきたような差分のとりかたを前方差分といいます。たとえば，あるコンパートメントPについて作った微分方程式（鹿のモデルと少し異なりますが，答えが$P=P_0\exp(-\alpha t)$となることが分かっているので，この式を使いましょう）

$$dP/dt=-\alpha P \qquad (3\text{-}1)$$

をこの差分の取り方で差分化すると，

* 東京大学海洋研究所

$$P^{(n+1)}-P^{(n)}=-\Delta t\cdot\alpha\cdot P^{(n)}$$

移項して

$$P^{(n+1)}=-\Delta t\cdot\alpha\cdot P^{(n)}+P^{(n)} \qquad (3\text{-}2)$$

となり，$P^{(1)}$（初期値）がわかっていれば，順繰りに P が解ける訳です。【前の単元で $P(1)$ のように DIMENSION を表す表記を用いましたが，差分式のタイムステップの n 番目を表す場合，普通論文などでは $P^{(n)}$ のように右肩にタイムステップを表す数字や記号を書きます】この際の Δt をいくつにとればよいか，は後の章で述べます。

一般的な形式で記述するならば，

$$du/dt=f(u,t)$$

のような微分方程式の差分は，タイムステップ n での，あるコンパートメント u の値を $u^{(n)}$ で表すと

$$u^{(n+1)}-u^{(n)}=\Delta t\cdot f^{(n)} \qquad (3\text{-}3)$$

$$\text{ここで } f^{(n)}=f(u^{(n)},\ n\Delta t)$$

となります。一般式については，ホウホウ，と思うだけでここでは十分です。

(1-2) 後方差分

(3-2) 式の計算機での解き方には，まだまだ色々な方法があります。

$$P^{(n+1)}-P^{(n)}=-\Delta t\cdot\alpha\cdot P^{(n+1)}$$

$(n+1)$ のつく項を移項して

$$P^{(n+1)}+\Delta t\cdot\alpha\cdot P^{(n+1)}=P^{(n)}$$

整理して

$$P^{(n+1)}=\frac{P^{(n)}}{(1+\alpha\Delta t)} \qquad (3\text{-}4)$$

というふうな差分のとりかたもあります。これは，(3-2) 式と比べると，$(1-\alpha\Delta t)$ をかける代わりに，$(1+\alpha\Delta t)$ で割ったということになりますね。$\alpha\Delta t$ が小さければこの2つは同じ結果になる，ということは微分の分野（というほど大げさではないけれども）でよく知られたことですね。この差分を一般的に表すと，

$$u^{(n+1)}-u^{(n)}=\Delta t\cdot f^{(n+1)}$$

$$\text{ここで}\quad f^{(n+1)}=f(u^{(n+1)},\ (n+1)\Delta t) \qquad (3\text{-}5)$$

この差分の取り方を後方差分といいます。(3-5) は，(3-1) 式のような簡単な微分方程式ならば，(3-4) のように解くことができますが，いつも $n+1$ の項を左辺に，n の項を右辺に整理できるとは限らないので，後方差分で解ける問題は限られているといえましょう。（後方差分は，差分に直したために生ずる不安定な解が生じにくいので，しばしばもちいられるのですが）

(1-3) 中央差分

もう，あと2つほどおつきあいください。そのあとで，デザート（演習）が用意されていますので。

(3-2) 式を差分化するのに

$$P^{(n+1)}-P^{(n-1)}=-2\Delta t\cdot\alpha\cdot P^{(n)}$$

移項して

$$P^{(n+1)}=-2\Delta t\cdot\alpha\cdot P^{(n)}+P^{(n+1)} \qquad (3\text{-}6)$$

とする差分を中央差分といいます。直前のタイムステップと2つ前のタイムステップの値を用いて次のタイムステップの値を求めています。一般的な記述では，

$$u^{(n+1)}-u^{(n-1)}=2\Delta t\cdot f^{(n)}$$

(1-4) ルンゲクッタ差分

またまた，面倒な話しで恐縮ですが，ルンゲクッタ差分というのがあって，この種の微分方程式を解くのにしばしば用いられるのでひとこと触れておきたいと思います。

$$P^{(n+1)*}-P^{(n)}=\Delta t\cdot f^{(n)}$$

$$P^{(n+1)}-P^{(n)}=\Delta t\cdot(f^{(n)}+f^{(n+1)*})/2 \qquad (3\text{-}7)$$

これは，dP/dt の部分だけ2回計算する差分法です。具体的に先の方程式をこの方法で解くとどうなるか，といいますと

$$P^{(n+1)*}-P^{(n)}=-\Delta t\cdot\alpha\cdot P^{(n)}$$

移項して

$$P^{(n+1)*}=-\Delta t\cdot\alpha\cdot P^{(n)}+P^{(n)} \qquad (3\text{-}8)$$

ここまでは，前方差分になります。(3-2) で求めた $P^{(n+1)}$ をそのまま次の計算に使うのではなく，

$$P^{(n+1)}=-\Delta t\cdot\alpha\cdot(P^{(n+1)*}+P^{(n)})/2+P^{(n)} \qquad (3\text{-}9)$$

というふうにもう1回微分をとりなおします。ルンゲクッタ差分の取りかたは他にも色々あります。この差分は，微分方程式を差分に直したときに差分の誤差が蓄積しにくいのでしばしば用いられる方法です（中村，伊東 (1981) 等を参照してください)。

(2) プログラミングの演習

【演習問題 3】 $du/dt=-\alpha\cdot u$ について差分方程式を4通り作ってみよう。ただし，$\alpha=0.2$，$u\ (0)=20$，$\Delta t=$ $=0.1$ とします。作ったら FORTRAN か BASIC でプログラミングしてみよう。ついでにパソコンで計算しよう。

【演習問題 4】

前回の3つのコンパートメントモデル (1-8) 式

$$dA/dt=\alpha CA-\beta AB$$
$$dB/dt=\beta AB-\gamma BC \qquad (1\text{-}8)$$
$$dC/dt=\gamma BC-\alpha CA$$

について差分方程式をルンゲクッタと前方差分で作ってみよう。ただし，$\alpha=0.2$，$\beta=0.1$，$\gamma=0.3$，$A(0)=20$，$B(0)=20$，$C(0)=20$，$\Delta t=0.1$ とします。作ったらFORTRAN か BASIC でプログラミングしてみよう。ついでにパソコンで計算しよう。

前回の演習解答

【演習 1】 次の確率不動ベクトルを求めなさい。

$$(t_1 t_2 t_3)\begin{vmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{vmatrix}=(t_1 t_2 t_3)$$

<解>

$$1/4\ t_1+1/3\ t_2+1/6\ t_3=t_1 \qquad (2\text{-}3)$$
$$1/2\ t_1+1/3\ t_2+2/3\ t_3=t_2 \qquad (2\text{-}4)$$
$$1/4\ t_1+1/3\ t_2+1/6\ t_3=t_3 \qquad (2\text{-}5)$$

この (2-3)～(2-5) の連立方程式は独立でない。しかし，t は確率ベクトルだから，

$$t_1+t_2+t_3=1 \qquad (2\text{-}6)$$

でなければならないので，この式を (2-5) 式の代わりに用いればよい。

でもって，$t_1=1/3$，$t_2=5/6$，$t_3=-1/6$

t_3 が負になるということは，自然界にはこういうマルコフ連鎖は存在し得ないということになります。

【演習 2】 下記の定常解を求めなさい。

$$dA/dt=\alpha CA-\beta AB$$
$$dB/dt=\beta AB-\gamma BC \qquad (1\text{-}8)$$
$$dC/dt=\gamma BC-\alpha CA$$

<解> $d★/dt$ の項を 0 とおいて A, B, C を求めればそれが定常解です。

$$0=\alpha CA-\beta AB$$
$$0=\beta AB-\gamma BC$$
$$0=\gamma BC-\alpha CA$$

これらの式は独立ではないから，$A+B+C=T$ を 3 番目の式の代りに用いて，

$$0=\alpha CA-\beta AB \qquad ①$$
$$0=\beta AB-\gamma BC \qquad ②$$
$$A+B+C=T \qquad ③$$

(1) $A\neq 0$ のとき

①の両辺を A で割って

$$\alpha C=\beta B \qquad ④$$

③から $A=T-B-C$ を②に代入して

1) $B\neq 0$ なら

$$\beta(T-B-C)=\gamma C \qquad ⑤$$

④⑤ から

$$B=\alpha T/(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$C=\beta T/(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$A=\gamma T/(\alpha+\beta+\gamma)$$

2) $B=0$ なら

①より $0=\alpha CA$

$A=T$，$B=C=0$

(2) $A=0$ のとき

$BC=0$，$B+C=T$，となるから

$A=0$，$B=0$，$C=T$，

または $A=0$，$B=T$．$C=0$

(つまり，定常解は「一意」ではありません。)

文　献

中村明子・伊藤文子 (1981) BASIC 演習．共立出版